# Izvod funkcije

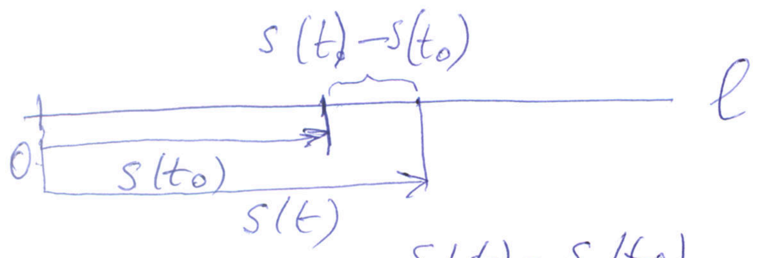
**Definicija** Neka je funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke $x_0$. Izvodom funkcije $f(x)$ u tački $x_0$ nazivamo broj, koji označavamo sa $f'(x_0)$, koji je jednak graničnoj vrijednosti odnosa $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, kad $x \to x_0$, odnosno,

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

Jezikom priraštaja, $\Delta x = x - x_0$ - priraštaj argumenta, $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ - priraštaj funkcije:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

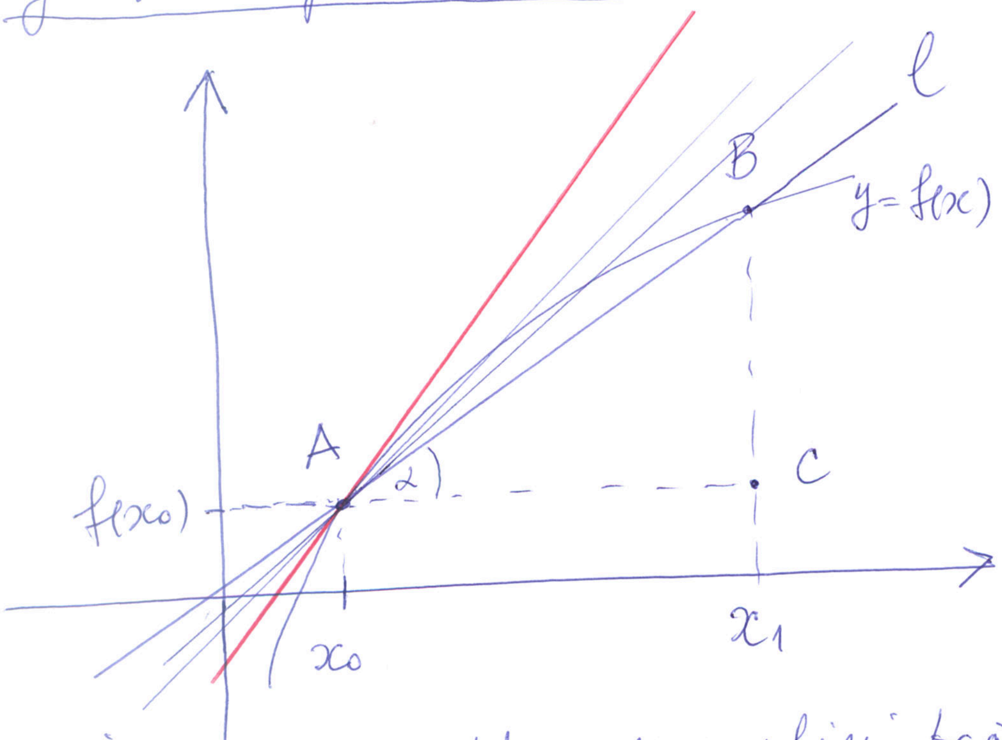
**Mehanički smisao izvoda** Neka se tačka $M$ kreće pravolinijski i neka je $s(t)$ put koji tačka $M$ pređe za vrijeme $t$. Tada je $s(t)-s(t_0)$ promjena puta koji je pređen za vrijeme $t-t_0$. Odnos $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ predstavlja srednju brzinu kretanja tačke $M$ za vrijeme $t-t_0$, a $\lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = s'(t_0)$ je trenutna brzina kretanja tačke u momentu $t_0$. Znači, trenutna brzina je izvod pređenog puta po vremenu $t$ u datom momentu $t_0$.




$$v_{sr} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

$$v(t_0) = v = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = s'(t_0).$$

## Geometrijski smisao izvoda




Neka je $f(x)$ neprekidna u okolini tačke $x_0$. Tačke $A(x_0, f(x_0))$ i $B(x_1, f(x_1))$ su tačke sa grafika $y=f(x)$ funkcije. Provucimo kroz tačke $A$ i $B$ pravu (sječicu) $l$. Njena jednačina je $y = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)+f$
Odavde slijedi da je koeficijent pravca prave $l$

$k = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, tj $k = tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Pustimo sada tačku $B$ da se kreće po grafiku $y=f(x)$ funkcije $f(x)$ i neka se približava tačk $A$. Sječica $l$ će težiti ka nekom graničnom položaju. Taj granični položaj sječice $l$ je tangenta na grafik funkcije $y=f(x)$ u tački $x_0$. Tangenta postoji, ako postoji konačan broj

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(x_0).$$

Jednačina tangente u tački $x_0$ na grafik funkcije $f(x)$ ima oblik

$$t: \quad y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Jednačina normale na grafik funkcije u toj tački je

$$n: \quad y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

Znači, koeficijent pravca tangente u nekoj tački na grafik funkcije $f(x)$ je izvod funkcije u toj tački.

Primjer Naći jednačine tangente i normale na grafik funkcije $f(x)=x^2$ u tački $(2,4)$.

Rješenje

$$t: \ y = 4(x-2)+4 = 4x-4$$

$$n: \ y = -\frac{1}{4}(x-2)+4 = -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}.$$

Definišimo lijevi i desni izvod funkcije u tački.

Definicija Neka je funkcija $f(x)$ definisana u lijevoj (desnoj) okolini tačke $x_0$. Desni (lijevi) izvod funkcije $f(x)$ u tački $x_0$ definišemo na sljedeći način:

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\left(f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

ili $f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$\left(f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right).$$

Primjeri 1. Naći izvod funkcije $f(x)=c$ ($c=const$) u tački $x\in\mathbb{R}$.

Rješenje $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0$

Znači, $f'(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

2. $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

Znači, $f'(x)=(x)'=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$

3. $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

Znači, za $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(x^2)'=2x$

4. Nađi izvod funkcije $f(x)=|x|$ u tački $x_0=0$.

<u>Rješenje</u> $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Razmotrimo posljednju graničnu vrijednost:

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

Znači, ova granična vrijednost ne postoji, odnosno, ne postoji izvod funkcije $|x|$ u nuli.

Funkcija koja ima izvod u nekoj tački naziva se <u>diferencijabilnom funkcijom</u> u toj tački, a operacija traženja izvoda funkcije se naziva <u>diferenciranjem</u>.

Vezu između neprekidnosti i diferencijabilnosti daje nam sljedeća teorema.

<u>Teorema</u> Svaka diferencijabilna funkcija u nekoj tački je neprekidna u toj tački.

Obratno ne važi. Primjer je upravo funkcija $f(x)=|x|$ koja je neprekidna u tački $x_0=0$, ali u njoj nije diferencijabilna.

# Osnovna pravila diferenciranja

1. Neka su $f$ i $g$ diferencijabilne funkcije u nekoj tački. Tada su i funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$, $f/g$ $(g(x) \neq 0)$ takođe diferencijabilne u toj tački, pri čemu važi:

1) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

2) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Dokažimo svojstvo 2)

$$(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x) =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x).$$

2. Izvod složene funkcije. Ako je funkcija $g$ diferencijabilna u tački $x_0$, a funkcija $f$ diferencijabilna u tački $y_0 = g(x_0)$, onda je i složena funkcija $F(x) = f(g(x))$ diferencijabilna u tački $x_0$ i važi:

$$F'(x_0) = (f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

# 3. Izvod inverzne funkcije

Neka je $y=f(x)$ neprekidna i strogo monotona na intervalu $(a,b)$. Ako postoji $f'(x_0)\neq 0$ za $x_0\in(a,b)$, onda inverzna funkcija $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$ ima prvi izvod u tački $y_0=f(x_0)$, koji je jednak:

$$\varphi'(y_0)=\left(f^{-1}(y_0)\right)'=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

<u>Dokaz</u> Pošto je $(f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$ onda je

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)'=\left(f^{-1}\right)'(f(x))\cdot f'(x)=\underline{\left(f^{-1}\right)'(y)\cdot f'(x)=(x)'=1}$$

Odavde je $\left(f^{-1}(y)\right)'=\dfrac{1}{f'(x)}$. ⊣

## Tablica osnovnih izvoda

1) $(x^a)'=a\,x^{a-1}$

2) $(a^x)'=a^x\ln a,\quad 0<a\neq 1$

3) $(e^x)'=e^x$

4) $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e,\quad x>0,\ 0<a\neq 1$

5) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

6) $(\sin x)'=\cos x$

7) $(\cos x)'=-\sin x$

8) $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

9) $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\quad x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

10) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1$

11) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1$

12) $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$

13) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

**Primjeri** 1) Naći izvod funkcija!

a) $y = \sin x^2$

b) $y = (3x+1)^2$

c) $y = \arccos x$

**Rješenje** a) $y = \sin x^2$ je složena funkcija

$f = \sin x$, $g = x^2$. Izvod je jednak $f(g(x)) \cdot g'(x)$ tj

$$y' = (\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot (2x) = 2x \cos x^2$$

b) $$y' = \left((3x+1)^2\right) = 2(3x+1)\cdot(3x+1)' = 6(3x+1)$$

c) $y = f(x) = \arccos x \qquad x \in [-1,1],\ y \in [0,\pi]$

$$f^{-1}(y) = \underline{\cos y = x}$$

Odavde, $$(\arccos x)' = \frac{1}{\left(f^{-1}(y)\right)'} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$ Ovo je moguće pošto je $\sin y > 0$, za $y \in (0,\pi)$

Znači, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

**Primjer** Naći izvod funkcije $y = \cos(\ln^{12} 2x)$

**Rješenje**: $$y' = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 =$$

$$= -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= -12 \sin(\ln^{12} 2x) \cdot \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}$$

# Izvod implicitno zadate funkcije



Ukoliko je funkcija $y=f(x)$ zadata eksplicitno (direktno) tada njen izvod znamo da računamo.

Funkcija je data implicitno ako je data jednačinom $F(x,y)=0$ koja nije rješiva po $y$.

Svaku eksplicitno zadatu funkciju $y=f(x)$ možemo zapisati kao implicitno zadatu u obliku $f(x)-y=0$, ali obratno ne možemo.

Primjer implicitno zadate funkcije je

$y+2x+\cos y-1=0$ ili $2^y-x+y=0$.

Ne treba zaboraviti da je $y$ funkcija od promjenljive $x$.

Da bi našli izvod funkcije $y$ koja je zadata implicitno jednačinom $F(x,y)=0$ dovoljno je prodiferencirati tu jednačinu po $x$, gdje se $y$ razmatra kao funkcija od promjenljive $x$ i rješavamo onda jednačinu po $y'$. Izvod implicitne funkcije se izražava preko argumenta $x$ i funkcije $y$.

Primjer Naći izvod funkcije $y$, koja je zadata jednačinom $x^3+y^3-3xy=0$.

Rješenje Funkcija $y$ je zadata implicitno. Prodiferencirajmo jednačinu $x^3+y^3-3xy=0$ po $x$. Tada imamo

$$3x^2+3y^2 y'-3(1\cdot y+xy')=0$$

Odakle slijedi da je $y^2y'-xy'=y-x^2$, odnosno

$$y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

# Izvod funkcije zadate parametarski

Neka je zavisnost između argumenta $x$ i funkcije $y$ zadata parametarski preko dvije jednačine:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

gdje je $t$ - pomoćna promjenljiva, koju nazivamo parametrom.

Nađimo izvod $y'_x$ tj funkcije $y$ po promjenljivoj $x$. Smatramo da funkcije $x(t)$ i $y(t)$ imaju izvode, kao i da funkcija $x = x(t)$ ima inverznu funkciju $t = \varphi(x)$. Po pravilu diferenciranja inverzne funkcije imamo da je

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

Funkcija $y = f(x)$, koja je zadata parametarski, možemo razmatrati kao složenu funkciju $y = y(t)$, gdje je $t = \varphi(x)$. Po pravilu diferenciranja složene funkcije $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. Odavde je

$$\boxed{y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \quad \text{tj} \quad y'_t = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Primjer Neka je $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$. Naći $y'_x$.

Rješenje Pošto je $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$, onda je $y'_x = \frac{2t}{3t^2}$, tj $y'_x = \frac{2}{3t}$.

Mi to možemo da se ubjedimo ako izrazimo $y$ po $x$. Zaista, $t = \sqrt[3]{x}$. Tada je $y = \sqrt[3]{x^2}$. Odavde je

$$y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad \text{tj} \quad y = \frac{2}{3t}.$$